Лекция 7 Числовой ряд и его сходимость. Необходимый признак сходимости ряда. Признаки сравнения.

Цель лекции:
Сформировать у студентов понимание понятий числового ряда, частичных сумм, сходимости и расходящейся последовательности, а также изучить необходимые признаки сходимости и методы сравнения рядов.

Основные вопросы:
Понятие числового ряда и частичных сумм.
Определение сходимости и расходимости ряда.
Необходимый признак сходимости ряда.
Признак сравнения.
Предельный признак сравнения.

Понятия числового ряда и его суммы. Знакоположительные числовые ряды. Признаки сходимости

Рассмотрим числовую последовательность $\{a_n\} = \{a_1, a_2, ..., a_n, ...\}$,

составим из неё сумму $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$

Определение. Выражение вида
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n =, \ a_1 + a_2 + ... \qquad (1)$$

называется числовым рядом, a числа a_n называют общим членом ряда.

Сумма первых n слагаемых ряда (1) называется его частичной суммой, она обозначается через S_n. При этом

$$S_1 = a_1,\ S_2 = a_1 + a_2,\ S_3 = a_1 + a_2 + a_3,\ ...,\ S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

Определение. Если существует конечный предел частичных сумм ряда (1) при $n \to \infty$, то это число называется суммой ряда S, а ряд в этом случае называется сходящимся: $S = \lim_{n\to\infty} S_n$.

Если предел частичных сумм не существует (например, равен ∞),то ряд называется расходящимся. У расходящегося ряда сумма не определена.

Пример 1. Рассмотрим ряд следующего вида:

$$b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + ... = \sum_{k=1}^{\infty} b_k q^{k-1}.$$

Здесь b_1 - первый член геометрической прогрессии, а q -называется ее кратностью.
Частичная сумма геометрической прогрессии определяется формулой:

$$S_n = b_1 \frac{1-q^n}{1-q} \quad (q \neq 1).$$

1) Если $|q| > 1$ и $b_1 \neq 0$, то $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} b_1 \frac{1-q^n}{1-q} = \infty$ и геометрическая прогрессия расходится.

2) Если $|q|<1$ и $b_1 \neq 0$, то $\lim_{n\to\infty} S_n = b_1 \frac{1-q^n}{1-q} = \frac{b_1}{1-q}$ и геометрическая прогрессия сходится.

3) Если $q = 1$ и $b_1 \neq 0$, то $S_n = b_1+b_1+b_1+...+ b_1 = n \cdot b_1$ => $S_n = \sum_{k=1}^{n} b_1 = nb_1$,

$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} nb_1 = \infty$ и геометрическая прогрессия расходится.

4) Если $q = -1$ и $b_1 \neq 0$, то ряд определяется следующим образом:

$b_1 - b_1 + b_1 - b_1 + ... + (-1)^{n-1} b_1 + ...$ =>

$$S_n = \begin{cases} b_1, \text{при } n \text{ - нечетном} \\ 0, \quad \text{при } n \text{ - четном}, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} S_n$$ не существует и прогрессия расходится.

Рассмотрим теперь простейшие свойства рядов.

1. Пусть числовые ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \tag{1}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \tag{2}$$

сходятся, и имеют суммы соответственно $S^{(1)}$ и $S^{(2)}$, тогда ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) \tag{3}$$

также сходится и его сумма равна $S^{(1)} + S^{(2)}$.

2. Если ряд (1) сходится, число $c \neq 0$, то ряд $\sum_{k=1}^{\infty} ca_k$ (4)

также сходится и его сумма равна $S^{(4)} = cS^{(1)}$

Если же ряд (1) расходится и $c \neq 0$, то ряд (4) расходится.

3. Если в ряде (1) изменить, добавить или отбросить конечное число членов, то сходимость этого ряда не изменится, т.е. если ряд (1) сходился, то новый ряд также сходится, а если ряд (1) расходился, то новый ряд расходится.

Изменив конечное число членов сходящегося ряда, можно изменить его сумму, но сходимость ряда при этом не нарушится.

Теорема 1. (Необходимый признак сходимости). Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится, то $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

Поскольку последовательность частичных сумм ряда сходится, то $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ и $\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S$.

Вычитая из первого соотношения второе получим $\lim_{k\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = S - S = 0$, т.е. $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$.

Условие $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ является только необходимым, оно не является достаточным для сходимости ряда. Об этом свидетельствует пример гармонического ряда $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$

.

Поэтому с помощью необходимого признака невозможно установить сходимость ряда. Чаще применяется обратное утверждение, равносильное доказанной теореме.

Следствие. Если $\lim_{k\to\infty} a_k$ не равен нулю, то ряд (1) расходится.

Докажите это следствие, используя метод “от противного”.

Теорема 2. (признак сравнения). Пусть имеется два ряда вида (1) и (2)

с положительными членами $(a_k, b_k > 0)$, удовлетворяющими неравенству

$$a_k \leq b_k \tag{5}$$

для всех, за исключением, быть может, конечного числа членов рядов.

Тогда если ряд (2) сходится, то ряд (1) также сходится, если же ряд (1) расходится, то ряд (2) также расходится.

Для сравнения обычно используют такие известные ряды как геометрическая прогрессия или ряд Дирихле.

Теорема 3. (Предельный признак сравнения).

Пусть даны ряды вида (1) и (2) с положительными членами такие, что существует конечный ненулевой предел $q = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k}$ $(q > 0)$.

Тогда ряды (1) и (2) сходятся или расходятся одновременно.

Из существования указанных пределов следует, что для положительных чисел $q_1 = q - \varepsilon$ и $q_2 = q + \varepsilon$, где $0 < q_1 < q < q_2$ найдется такой номер N, что для $k > N$ выполняется неравенство $q_1 < \frac{a_k}{b_k} < q_2$; т.е. $q_1 b_k < a_k < q_2 b_k$.

Если ряд (1) сходится, то из неравенства $q_1 b_k < a_k$, первого признака сравнения и свойства 2) рядов следует, что ряд (2) сходится.

Если ряд (1) расходится, то из неравенства $a_k < q_2 b_k$ первого признака сравнения и свойства 2) следует, что ряд (2) расходится.

Контрольные вопросы:

- Что такое числовой ряд?
- Как определяется сходимость ряда?
- Сформулируйте необходимый признак сходимости.
- В чём суть признака сравнения?
- Что утверждает предельный признак сравнения?
- Приведите пример сходящегося и расходящегося ряда.
- Почему из условия $a_n \to 0$не следует сходимость ряда?

Рекомендуемая литература:

1. Қасымов Қ., Қасымов Ә. Жоғары математика курсы. Алматы, Санат, 1994

2. Дүйсек А.К., Қасымбеков С.Қ. Жоғары математика. Алматы, ҚБТУ, 2004

3. Айдос Е.Ж. Жоғары математика (қысқаша курс). Алматы, Иль-Тех-Кітап, 2003

4. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики – М.: «Наука». – 1989. – 656 с.

5. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа, ч.1, М: «Наука». – 1982.

6. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия М: «Наука». – 1991.

7. Шипачев В.С. Высшая математика

8. Ефимов Н.В., Краткий курс аналитической геометрии.

9. Махмеджанов Н.М. Жоғары математика.